Il est parfois utile (surtout en théorie des probabilités, mais une telle question apparaît aussi dans le section 2.5 et dans le chapitre 7) de montrer l'unicité d'une mesure ayant des propriétés données. La proposition suivante donne une méthode pour montrer une telle unicité (d'autres méthodes sont possibles, voir, par exemple, la proposition 5.8 dans le chapitre 5).

Proposition 2.30 *Soit* (E, T) *un espace mesurable et* m, μ *deux mesures sur* T. *On suppose qu'il existe* $\mathcal{C} \subset T$ *tel que*

1. $\mathcal{C}$ *engendre* T,
2. $\mathcal{C}$ *est stable par intersection finie (c'est-à-dire* $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$*),*
3. *Il existe une suite* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ *telle que* $E_n \cap E_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$, $m(E_n) < \infty$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et* $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$,
4. $m(A) = \mu(A)$ *pour tout* $A \in \mathcal{C}$.

On a alors $m = \mu$ *(c'est-à-dire* $m(A) = \mu(A)$ *pour tout* $A \in T$*).*

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 2.22.

2.4 Mesure signée

Définition 2.31 (Mesure signée) *Soit* (E, T) *un espace mesurable. On appelle mesure signée (sur* T*) une application* $m : T \to \mathbb{R}$ *vérifiant la propriété de* σ*-additivité, c'est-à-dire telle que pour toute famille* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *telle que* $A_n \cap A_m = \emptyset$, *si* $n \neq m$,

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.8}$$

Noter qu'une mesure signée prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. En prenant $A_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans (2.8), on en déduit que $m(\emptyset) = 0$.

On peut aussi considérer des mesures à valeurs complexes (c'est-à-dire dans $\mathbb{C}$). Dans ce cas, les parties réelles et imaginaires de ces mesures à valeurs complexes sont des mesures signées.

Dans toute la suite du cours, les mesures considérées seront en général positives, c'est-à-dire (cf. définition 2.13) à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Lorsque l'on s'intéressera à des mesures prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}$, on précisera qu'il s'agit de mesures signées. Noter que les mesures signées ne vérifient pas, en général, les propriétés (2.3) et (2.4). Pour avoir un contre–exemple, il suffit de considérer une mesure signée m (non nulle) telle que $-m$ soit une mesure (positive).

Proposition 2.32 (Décomposition de Hahn d'une mesure signée) *Soient* $(E, \mathcal{T})$ *un espace mesurable et* m *une mesure signée sur* $\mathcal{T}$. *Alors, il existe deux mesures (positives) finies, notées* m^+ *et* m^-, *telles que :*

1. $m(A) = m^+(A) - m^-(A)$, *pour tout* $A \in \mathcal{T}$.
2. *Les mesures* m^+ *et* m^- *sont étrangères, c'est-à-dire qu'il existe* $C \in \mathcal{T}$ *tel que* $m^+(C) = 0$, *et* $m^-(E \setminus C) = 0$.

Une conséquence des propriétés ci-dessus est que $m^-(A) = -m(A \cap C)$ *et* $m^+(A) = m(A \cap C^c)$ *pour tout* $A \in \mathcal{T}$.

De plus, la décomposition de m *en différence de deux mesures (positives) finies étrangères est unique. Elle s'appelle décomposition de Hahn de* m.

DÉMONSTRATION – La démonstration d'existence de m^+ et m^- est décomposée en trois étapes. Dans la première étape, on va montrer que, si $A \in \mathcal{T}$, il existe $\tilde{A} \in \mathcal{T}$ tel que $\tilde{A} \subset A$, $m(\tilde{A}) \geq m(A)$ et :

$$B \in \mathcal{T},\ B \subset \tilde{A} \ \Rightarrow\ m(B) \geq 0.$$

Cette première étape nous permettra, dans l'étape 2, de montrer l'existence de $C \in \mathcal{T}$ tel que $m(C) = \sup\{m(A), A \in \mathcal{T}\}$ (ceci montre, en particulier que $\sup\{m(A), A \in \mathcal{T}\} < \infty$).

Enfin, dans l'étape 3, on pose $m^+(A) = m(A \cap C)$ et $m^-(A) = -m(A \cap C^c)$ (pour tout $A \in \mathcal{T}$) et on remarque que m^+ et m^- sont des mesures finies, étrangères et telles que $m = m^+ - m^-$.

Étape 1. Soit $A \in \mathcal{T}$, on montre, dans cette étape, qu'il existe $\tilde{A} \in \mathcal{T}$ tel que $\tilde{A} \subset A$, $m(\tilde{A}) \geq m(A)$ et :

$$B \in \mathcal{T},\ B \subset \tilde{A} \ \Rightarrow\ m(B) \geq 0. \tag{2.9}$$

On commence par montrer, par récurrence sur n, l'existence d'une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ tels que :

1. $B_0 = A$,
2. $B_{n+1} \subset B_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
3. $m(B_n \setminus B_{n+1}) \leq \beta_n = \max\{\frac{\alpha_n}{2}, -1\}$ où $\alpha_n = \inf\{m(C), C \in \mathcal{T}, C \subset B_n\}$.

On prend $B_0 = A$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, on suppose B_p connu pour $p \leq n$. On a

$$\alpha_n = \inf\{m(C), C \subset B_n\} \leq 0$$

(car $\emptyset \subset B_n$). Si $\alpha_n = -\infty$, il existe $C_n \in \mathcal{T}$ tel que

$$C_n \subset B_n \text{ et } m(C_n) \leq \beta_n = -1.$$

Si $-\infty < \alpha_n < 0$, on a $\beta_n > \alpha_n$, il existe donc $C_n \in \mathcal{T}$ tel que

$$C_n \subset B_n \text{ et } m(C_n) \leq \beta_n.$$

Si $\alpha_n = 0$, on prend $C_n = \emptyset$. Enfin, on prend $B_{n+1} = B_n \setminus C_n$ et on obtient bien les propriétés désirées en remarquant que $C_n = B_n \setminus B_{n+1}$.

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (c'est-à-dire $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Pour $m > n$, on a donc $C_m \subset B_m \subset B_{n+1}$ et donc $C_m \cap C_n = \emptyset$ (car $B_{n+1} = B_n \setminus C_n$). Par σ–additivité de m, on en déduit

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(C_n).$$

Comme $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) \in \mathbb{R}$, la série de terme général $m(C_n)$ est convergente. On a donc

$$m(C_n) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty \text{ et donc } \beta_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

(car $m(C_n) \leq \beta_n \leq 0$) et, finalement,

$$\alpha_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

On pose maintenant

$$\tilde{A} = A \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

On a, bien sûr, $\tilde{A} \in T$ et $\tilde{A} \subset A$. On montre maintenant que $\tilde{A}$ vérifie (2.9). Soit $C \in T$, $C \subset \tilde{A}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C \subset B_n$ et donc $m(C) \geq \alpha_n$. Quand $n \to +\infty$, on en déduit que $m(C) \geq 0$. ce qui donne bien (2.9).

Il reste à montrer que $m(\tilde{A}) \geq m(A)$. Comme $A = \tilde{A} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n)$ (et que cette union est "disjointe"), la σ–additivité de m donne que $m(A) = m(\tilde{A}) + \sum_{n\in\mathbb{N}} m(C_n) \leq m(\tilde{A})$. Ce qui termine la première étape.

Étape 2. On pose $\alpha = \sup\{m(A), A \in T\}$ et on montre, dans cette étape, qu'il existe $C \in T$ tel que $m(C) = \alpha$.

Par définition d'une borne supérieure, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T telle que $m(A_n) \to \alpha$ quand $n \to +\infty$. Grâce à l'étape 1, on peut supposer (quitte à remplacer A_n par $\tilde{A_n}$ construit comme dans l'étape 1) que A_n vérifie (2.9), c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B \in T,\ B \subset A_n \ \Rightarrow\ m(B) \geq 0. \tag{2.10}$$

On pose $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On commence par montrer que $m(C) \geq m(A_m)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On peut écrire C comme une union "disjointe" :

$$C = A_m \cup (\bigcup_{n\neq m} C_{n,m}),$$

avec $C_{n,m} \in T$ et $C_{n,m} \subset A_n$ pour tout $m \neq n$. En effet, il suffit pour cela de construire par récurrence (sur n) la suite des $C_{n,m}$ en prenant pour $C_{n,m}$ l'intersection de C avec A_n à laquelle on retranche A_m et les $C_{n,m}$ précédemment construits.

Par σ–additivité de m, on a

$$m(C) = m(A_m) + \sum_{n\neq m} m(C_{n,m})$$

puis, comme $C_{n,m} \subset A_n$, on a, par (2.10), $m(C_{n,m}) \geq 0$. On en déduit $m(C) \geq m(A_m)$.

En faisant tendre m vers ∞, on a alors $m(C) \geq \alpha$ et donc, finalement $m(C) = \alpha$.

Étape 3. Construction de m^+ et m^-.

Pour construire m^+ et m^-, on utilise un élément C de T tel que $m(C) = \alpha = \sup\{m(A), A \in T\}$ (l'existence de C a été montré à l'étape 2). Pour $A \in T$, on pose :

$$m^+(A) = m(A \cap C),\ m^-(A) = -m(A \cap C^c).$$

On a $m^+(\emptyset) = m^-(\emptyset) = 0$ (car $m(\emptyset) = 0$) et les applications m^+ et m^- sont des applications σ–additives de T dans $\mathbb{R}$ (car m est σ–additive). Pour montrer que m^+ et m^- sont des mesures finies, il suffit de montrer qu'elles prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ce que l'on montre maintenant.

Soit $A \in T$, on a, par additivité de m et grâce à la définition de α,

$$\alpha = m(C) = m(A \cap C) + m(A^c \cap C) \leq m(A \cap C) + \alpha.$$

On en déduit $m(A \cap C) \geq 0$, ce qui prouve bien que $m^+(A) \in \mathbb{R}_+$. On a aussi, encore une fois par additivité de m et grâce à la définition de α,

$$\alpha \geq m(C) + m(A \cap C^c) = \alpha + m(A \cap C^c).$$

On en déduit $m(A \cap C^c) \leq 0$ et donc $m^-(A) \in \mathbb{R}_+$.

Les applications m^+ et m^- sont des mesures finies (noter que $m^+(E) = m(E \cap C) < \infty$ et $m^-(E) = m(E \cap C^c) < \infty$). Elles sont étrangères car

$$^+(C^c) = m(C^c \cap C) = m(\emptyset) = 0 \text{ et } m^-(C) = -m(C \cap C^c) = 0.$$

Enfin, pour tout $A \in T$, on a, par σ–additivité de m :

$$m(A) = m(A \cap C) + m(A \cap C^c) = m^+(A) - m^-(A).$$

Ceci termine la démonstration de l'existence de m^+ et m^-.

Pour montrer l'unicité de cette décomposition de m, on suppose que μ et ν sont deux mesures finies étrangères telles que $m = \mu - \nu$. Comme elle sont étrangères, il existe $D \in T$ tel que $\mu(D^c) = \nu(D) = 0$. On montre alors que, pour tout $A \in T$, on a nécessairement :

$$\mu(A) = \sup\{m(B);\ B \in T,\ B \subset A\}. \tag{2.11}$$

En effet, si $A \in T$ et $B \in T$, $B \subset A$, on a $m(B) = \mu(B) - \nu(B) \leq \mu(B) \leq \mu(A)$ (par positivité de ν et monotonie de μ). Puis, en prenant $B = A \cap D$, on a

$$m(B) = m(A \cap D) = \mu(A \cap D) - \nu(A \cap D) = \mu(A \cap D) = \mu(A) - \mu(A \cap D^c) = \mu(A).$$

Ceci prouve bien que (2.11) est vraie (et prouve que le sup est atteint pour $B = A \cap D$). L'égalité (2.11) donne donc de manière unique μ en fonction de m. L'unicité de ν découle alors du fait que $\nu = \mu - m$. ∎

Remarque 2.33 Une conséquence de la proposition 2.32 est que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$ apparaissant dans (2.8) est absolument convergente car (pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$) on a

$$\sum_{p=0}^{n} |m(A_p)| \leq \sum_{p=0}^{n} m^+(A_p) + \sum_{p=0}^{n} m^-(A_p) \leq m^+(E) + m^-(E) < \infty.$$

En fait, la définition 2.31 donne directement que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$ apparaissant dans (2.8) est commutativement convergente (c'est-à-dire qu'elle est convergente, dans